MATEMATICA E STORIA DELLA MATEMATICA IN CLASSE: LA STRANA STORIA DEL TEOREMA DEGLI ZERI

Domingo Paola
Liceo scientifico “A. Issel ” Finale Ligure
GREMG - Dipartimento di Matematica Università di Genova

SOMMARIO

Con questa nota vorrei proporre un esempio di utilizzazione della storia della matematica in classe per offrire agli studenti la possibilità di vedere da diversi punti di vista concetti importanti, ma in genere difficili da assimilare. L’esempio in questione riguarda un passo delle "Leçons élémentaires sur les mathématiques" di Lagrange (tradotte in italiano nel 1839), a proposito del calcolo approssimato delle radici di un'equazione polinomiale. Questo lavoro è una traduzione per la classe delle idee esposte in un articolo di Marta Menghini su questo tema. Parte delle proposte presentate sono state realizzate in una terza classe di liceo scientifico che segue un corso di sperimentazione PNI. Ritengo che questo lavoro si possa considerare un esempio di utilizzazione in classe di differenti indicazioni: quelle della storia (le “Leçons” di Lagrange), della ricerca didattica (l’articolo di Menghini) e di matematici (il bel libro di Courant e Robbins). L’uso dell’elaboratore elettronico mi pare possa costituire un significativo esempio di utilizzazione delle nuove tecnologie non fine a se stesso, ma funzionale al percorso didattico scelto.

INTRODUZIONE

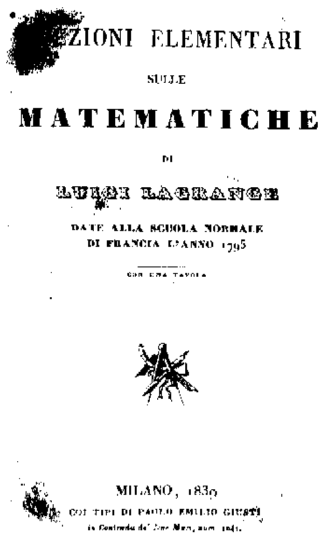
L’attività di insegnamento richiede competenze assai diversificate, che vanno al di là di questioni puramente tecniche inerenti le singole discipline e coinvolgono aspetti di carattere storico-epistemologico e psico-pedagogico. I primi, favorendo una visione telescopica degli argomenti da trattare, sono importantissimi ai fini della stesura di una programmazione consapevole dei punti critici, dei concetti unificanti, degli ostacoli epistemologici, delle conseguenze della scelta di un certo approccio piuttosto che di un altro. I secondi sono necessari per interagire in modo proficuo con lo studente, per indagare più da vicino a livello locale, individuale, per fare ipotesi sugli schemi mentali dello studente, sugli effetti della sua esperienza pregressa, sulla natura degli errori che commette: ipotesi necessarie a tarare in itinere la programmazione di inizio anno scolastico.
Con questa nota vorrei proporre un esempio di utilizzazione della storia della matematica in classe per offrire agli studenti la possibilità di ricapitolare i nodi concettuali dei percorsi che hanno portato alla precisazione di concetti particolarmente delicati. Sono convinto che la possibilità di ricapitolare crei le condizioni per appropriarsi dei significati degli argomenti

oggetto di studio e quindi sia un utilissimo strumento per aiutare gli studenti ad affrontare e a superare gli ostacoli epistemologici che l'apprendimento di certi concetti particolarmente delicati e problematici comporta.
Spero che questo articolo possa dare utili informazioni anche a chi studia il problema dell'utilizzazione della storia della matematica in classe e, in particolare, sull'intervento che, spesso, un insegnante deve fare per lavorare con gli studenti su fonti della storia della matematica.
La proposta che segue è già stata realizzata in due diverse occasioni. La prima riguardava un corso di aggiornamento per insegnanti di scuola secondaria superiore ed aveva lo scopo di offrire spunti di riflessione sull'insegnamento dell'analisi matematica a partire dalla considerazione di un tema (quello delle soluzioni approssimate delle equazioni), che è riconosciuto essere importante, ma che spesso viene trascurato. In questo caso la storia, agendo come lente di ingrandimento sui nodi concettuali, consente di rendersi conto di quanto siano delicati certi passaggi, quali, per esempio, il cambio di prospettiva sulla problematica relativa alla determinazione delle soluzioni delle equazioni da Lagrange (fornire un metodo per trovare le soluzioni) a Bolzano e Cauchy (individuare le condizioni che garantiscano l'esistenza delle soluzioni). Una riflessione di questo tipo, soprattutto se accompagnata da una presa di coscienza del tipo di problemi che la nuova prospettiva consente di porsi e risolvere, può avere notevoli ricadute sul piano didattico.
La seconda realizzazione è quella su cui fisso l'attenzione in questo articolo e concerne l'esperienza in una classe di terza liceo scientifico che segue un corso di sperimentazione PNI (Piano Nazionale Informatica) e che è composta da studenti assai motivati.
Ritengo che le classi di un triennio di liceo siano gli ambienti più favorevoli a proporre attività basate sulla proposta di questo lavoro. Lo scopo di questo articolo è anche quello di dare una traccia di come si possano tradurre in classe le parole (e soprattutto i concetti) dei grandi matematici del passato, basandosi sulle indicazioni dei ricercatori (Menghini, 1991) e, quando possibile, di altri matematici (Courant, Robbins, 1971). Ho quindi tralasciato la descrizione delle reazioni degli studenti; mi sembra opportuno, però, segnalare che ho rilevato che alcune delle proposte fornite dai gruppi di lavoro per risolvere il problema di determinare, per via approssimata, le soluzioni di un'equazione polinomiale sono state simili a quelle proposte nella storia da alcuni matematici. Ciò è stato motivo di soddisfazione, ma, ci tengo a sottolinearlo, non si è trattato di una sorpresa, dato che mi è spesso capitato di notare strette somiglianze fra le strategie risolutive scelte da studenti per risolvere un problema e quelle utilizzate da alcuni matematici nei primi tentativi di risolvere quel particolare problema [Paola, 1998].

Alcune pagine del libro di Lagrange usato, in particolare quelle che contengono i passi citati nel presente articolo, sono state da me lette e commentate in classe dopo che gli studenti, lavorando in piccoli gruppi, avevano proposto soluzioni per risolvere il problema di determinare per via approssimata le soluzioni di un'equazione polinomiale.

Può interessare il lettore sapere che la maggior parte degli studenti ha proposto di approssimare "la soluzione di un'equazione $f(x) = 0$ partendo da un punto della funzione $f(x)$ di ascissa a fissata e ordinata $f(a)$ non nulla e portandosi avanti con piccoli passi fino a ottenere un punto della funzione avente ordinata di segno opposto a $f(a)$" .

Proprio la lettura e il commento di alcune pagine del libro di Lagrange suggeriscono che il presente lavoro può essere anche pensato come un esempio di utilizzazione delle fonti storiche originali in classe (Arcavi & al, in stampa), senza, ovviamente, avere la pretesa di fare una vera e propria analisi storica. Sottolineo che in questo caso l'uso delle fonti originali che, come è noto, comporta sempre problemi di non facile soluzione, è stato semplificato dall'esistenza di una traduzione italiana nella biblioteca del Dipartimento di Matematica



ZIONI ELEMENTARI

SULLE

MATEMATICHE

DI

LUIGI LAGRANGE

DATE ALLA SCUOLA NORMALE
DI FRANCIA L'ANNO 1795

CON UNA TAVOLA

MILANO, 1839

COI TIPI DI PAOLO EMILIO GIUSTI

dell'Università di Genova.

Nel paragrafo "Il teorema degli zeri e il problema della risoluzione approssimata delle equazioni" riporto alcuni passi del libro di Lagrange usato nel lavoro in classe, commentandoli ed esemplificandoli. Le precisazioni e le esemplificazioni che qui riporto sono solo una parte di quelle che ho ritenuto opportuno fare in classe, affinché l'uso del testo di Lagrange non fosse un'attività fine a se stessa, ma avesse una ricaduta sull'apprendimento.

Nel paragrafo "Qualche altra considerazione sul teorema degli zeri" propongo alcuni spunti di riflessione ai quali ho accennato nel corso di aggiornamento, ma non in classe. Ritengo che essi possano essere sviluppati in classe nel momento in cui si inizino ad affrontare, sistematicamente, argomenti di analisi matematica (per esempio nel corso della classe quarta).

IL TEOREMA DEGLI ZERI E IL PROBLEMA DELLA RISOLUZIONE APPROSSIMATA DELLE EQUAZIONI

Il triennio di un liceo è un ambiente ideale per presentare il problema della risoluzione approssimata di un'equazione: gli studenti hanno già lavorato per molto tempo sulla risoluzione di equazioni. Chi fra loro non sa applicare varie tecniche risolutive, valide per particolari classi di equazioni, almeno sa che tali tecniche esistono. Almeno sa che il ricordarle e applicarle ha costituito un problema negli anni precedenti. Il contratto didattico ha fatto sì che la risoluzione di equazioni sia diventata, in qualche modo, un problema per gli studenti, anche se un problema interno alla situazione didattica: probabilmente non si tratta di un bisogno intellettuale, ma, in ogni caso, ed è quello che importa, lo studente è in grado di apprezzare tecniche e metodi che gli consentono di risolvere, una volta per tutte, quelle equazioni che tanto lo hanno tormentato negli anni precedenti. Tutto ciò è già un buon motivo per partire dal problema di costruire tecniche che consentono di unificare il problema della risoluzione di equazioni. Ma ritengo che vi siano almeno due altri motivi, forse ancora più validi:

1. il problema di determinare le soluzioni di una equazione polinomiale di qualunque grado è stato ritenuto in alcuni periodi della storia della matematica come *il problema della matematica*. Nella lezione quarta (pp. 75 – 98) della traduzione italiana delle "Leçons élémentaires sur les mathématiques" (lezioni originariamente tenute nel 1795), Lagrange scriveva, a proposito del calcolo delle radici di un'equazione polinomiale [Lagrange, 1839, p. 75]:

> "Il quinto grado presenta una specie di barriera che gli sforzi degli analisti non hanno ancora potuto superare e la soluzione generale delle equazioni rimane ancora a desiderarsi nell'algebra [...] determinare in numeri i valori delle radici è, in ultimo risultato, lo scopo della soluzione di tutti i problemi che i bisogni o la curiosità presentano da risolvere. Propongomi qui di esporre i principali mezzi immaginati a ottenere questo fine importante".

Partire da questo problema consente, quindi, come si diceva prima, di dare agli studenti la possibilità di ricapitolare e di creare le basi per un appropriazione dei significati.

2. In particolare i moderni mezzi di calcolo consentono di guardare al problema di risolvere le equazioni spostando l'attenzione dalla ricerca di un algoritmo, al confronto tra differenti algoritmi, alla verifica di correttezza delle procedure, alle condizioni di applicabilità, con tutto vantaggio per gli aspetti di tipo cognitivo e critico. Certo, si perde in abilità di calcolo e di manipolazione e questo può essere un rischio da non sottovalutare, ma sembra sempre meno

giustificabile il pretendere ancora che gli studenti raggiungano quelle capacità di calcolo che venivano richieste nel passato.

Il teorema degli zeri, nella sua formulazione attuale è ritenuto di una verità talmente ovvia da far pensare che l'enunciato sia banale per gli studenti. Si può dire che esso viva come teorema in atto dal primo momento che uno studente osservi un grafico passare per l'asse delle ascisse e dia a questo passaggio il significato dell'annullarsi dell'ordinata, ossia di $f(x)$ [Menghini, 1991].

La formulazione di Bolzano del teorema degli zeri è la seguente:

Sia f continua in un intervallo $[a,b]$ e sia $f(a)f(b) < 0$. Allora esiste c appartenente all'intervallo (a, b), tale che $f(c) = 0$.

Il teorema di Bolzano corrisponde alla nostra idea intuitiva di curva continua che per passare da un punto al di sotto dell'asse x a uno al di sopra deve tagliare l'asse in qualche punto.

Vediamo come Lagrange utilizza questo teorema (senza esplicitarlo) per risolvere quello che ritiene essere *il problema della matematica* [Lagrange, 1839, p. 75-77]

> Consideriamo un'equazione di grado m rappresentabile con la formula:
>
> $x^{m}+px^{m-1}+qx^{m-2}+rx^{m-3}+\text{ecc.}+u=0$
>
> [...] Più questo valore [la somma a primo membro] si accosterà a 0 più il valore di x che l'avrà prodotto s'accosterà a essere una radice dell'equazione. E se si trovano due valori di x, l'uno dei quali renda la somma di tutti i termini uguale a una quantità positiva e l'altro a una negativa: si potrà anticipatamente esser certi che, fra questi due valori, ve ne sarà necessariamente almeno uno che la renderà uguale a 0 e sarà quindi una radice dell'equazione.
>
> Di fatto indichiamo in generale con P la somma di tutti i termini dell'equazione che hanno il segno + e con Q la somma di tutti quelli che hanno il segno – , sicché l'equazione venga rappresentata da P – Q = 0, supponiamo per maggiore facilità che i due valori di x siano positivi, A il più piccolo, B il maggiore: e che la sostituzione di A invece di x dia un risultato negativo, e la sostituzione di B uno positivo [...]. Dunque, quando x = A, P sarà minore di Q e quando x = B, P sarà maggiore di Q. Ora, per la forma delle quantità P e Q che non contengono se non termini positivi e potenze intere e positive di x, è chiaro che queste quantità aumentano continuamente a misura che x aumenta e che facendo aumentare x per tutti i gradi insensibili da A sino a B, esse aumenteranno pure per gradi insensibili, ma in modo che la P aumenterà più che Q, poiché dopo essere stata la minore, diventerà la maggiore. Vi sarà dunque necessariamente un tal punto fra i due valori A e B ove P eguaglierà Q; come due mobili che si suppongono percorrere una stessa retta, partendo nello

> stesso istante da due punti diversi. Se giungano nello stesso tempo a due altri punti, ma in modo che quello che prima era indietro si trovi più avanzato dell'altro, ciò non potrà essere senza ch'essi siansi incontrati nel loro cammino. Questo valore di x che renderà P = Q, sarà una delle radici dell'equazione e cadrà necessariamente tra i due valori A e B.
>
> Si potrà fare un simile ragionamento sopra gli altri casi e si giungerà sempre al medesimo risultamento.

Successivamente Lagrange dimostra quanto affermato considerando l'equazione data come un prodotto di fattori uguagliato a 0 e passa a descrivere [Lagrange, 1839, p. 78]

> una specie di applicazione della geometria all'algebra ed è ben degno di essere qui esposto, essendo di uso generalissimo in tutte le parti della matematica.

Si tratta, in sostanza, di tracciare, su un piano cartesiano, il grafico della funzione polinomiale che si trova al primo membro dell'equazione di cui si vogliono le soluzioni. Lagrange afferma che [Lagrange, 1839, p. 79]

> è chiaro che le sue intersezioni con l'asse AB daranno le radici dell'equazione proposta.

Successivamente afferma che se $f(a)f(b)>0$, allora tra a e b vi è un numero pari (anche nullo) di intersezioni (contate con la loro molteplicità). Invece se $f(a)f(b)<0$, allora vi è un numero dispari di intersezioni (contate con la loro molteplicità). Quindi passa a descrivere il suo metodo per trovare un intervallo nel quale sono sicuramente comprese tutte le radici positive e tutte quelle negative (ricordiamo che Lagrange si è messo nella condizione ‘primo termine positivo’ e ciò non fa perdere in generalità). Vediamo come fa [Lagrange, 1839, p. 83 - 84]

> Abbiam detto potersi dare a x un valore tanto grande che il primo termine x^m dell’equazione sorpassasse la somma di tutti quelli di segno contrario. Quantunque questa proposizione non abbia bisogno d’essere dimostrata, perché essendo la potenza x^m più alta di tutte le altre potenze di x che entrano nell’equazione, deve crescere più rapidamente di quelle, di mano in mano che x aumenta; pure per non lasciare alcun dubbio la proveremo in un modo semplicissimo, il quale avrà altresì il vantaggio di assegnare un limite, oltre al quale saremmo certi che nessuna radice dell’equazione potrà trovarsi. A tal fine si cominci dal supporre x positiva e che sia k il maggiore dei coefficienti dei termini negativi; facendo $x = k+1$ si avrà:
>
> $x^m=(k+1)^m=k(k+1)^{m-1}+(k+1)^{m-1}$
>
> ora
>
> $(k+1)^{m-1}=k(k+1)^{m-2}+(k+1)^{m-2}$
>
> e così pure

$(k+1)^{m-2}=k(k+1)^{m-3}+(k+1)^{m-3}$

e così via; perciò si avrà

$(k+1)^m=k(k+1)^{m-1}+k(k+1)^{m-2}+ k(k+1)^{m-3}$ecc.$+k+1$

Ora questa quantità è evidentemente maggiore della somma di tutti i termini negativi dell'equazione presi positivamente, e quando si fa

$x = k+1$

dunque la supposizione di $x = k+1$ renderà necessariamente il primo termine x^m maggiore della somma di tutti i termini negativi (Ossia: il fatto di aver posto $x = k + 1$, per come è stato scelto k, implica che x^m sia maggiore della somma di tutti i termini negativi). Quindi il valore di y avrà lo stesso segno di x^m.

Per facilitare la comprensione del testo di Lagrange, in classe ho proposto la seguente tavola 1, che schematizza, in termini moderni, il procedimento descritto da Lagrange. L'esempio che si trova nella seconda colonna ha semplicemente lo scopo di contribuire ulteriormente alla comprensione del procedimento descritto da Lagrange.

Tavola 1

Procedura	Esempio
Sia data un'equazione di grado m rappresentabile con F(x)=0	x^5-3x^3+11x^2-1=0
$Q(x)$ = polinomio formato dalla somma di tutti i coefficienti negativi. $P(x)$ = polinomio formato dalla somma di tutti i coefficienti positivi. $F(x) = 0$ è equivalente a $P – Q = 0$	$Q(x) = 3x^3 + 1$ $P(x) = x^5 + 11x^2$ $P – Q = x^5$-3x^3+11x^2-1=0
Sia k il maggiore in valore assoluto dei coefficienti negativi dell'equazione	$k = 3$
Se $x = k + 1$ abbiamo $x^{\mathrm{m}}=(k+1)^m=k(k+1)^{m-1}+(k+1)^{m-1}$ $(k+1)^{m-1}=k(k+1)^{\mathrm{m}-2}+(\mathrm{k}+1)^{m-2}$ $(k+1)^{m-2}=k(k+1)^{m-3}+(k+1)^{m-3}$ .... $(k+1)^m=k(k+1)^{m-1}+k(k+1)^{m-2}+$ ecc.$+k+1$	$x = 3+1=4$ $x^5 =4^5 = 3(4)^4+4^4$ $4^4 = 3(4)^3+4^3$ .... $4^5 =3(4)^4+3(4)^3+$ ecc.$+4$
$(k+1)^m > Q(k+1)$	$4^5 > 3(4)^3+1$
Quindi per x maggiori di k+1 $F(x)$ ha lo stesso segno del primo termine	$x> 4 \rightarrow F(x) > 0$

> Lo stesso ragionamento e lo stesso risultato avranno luogo pel caso negativo, cangiando solamente x in $-x$ nell'equazione, all'oggetto di cangiare le radici positive in negative e reciprocamente […]
>
> E cangiando x con $-x$ è h il maggiore coefficiente dei termini negativi della nuova equazione, supponendo sempre il primo positivo, tutte le radici reali dell'equazione saranno comprese necessariamente tra i limiti $k+1$ e $-h-1$

Lagrange afferma che poiché $-F(-x)$ è positivo per $x > h + 1$, allora $F(x)$ sarà negativo per $x < -h-1$ in ragione delle simmetrie. Come per il caso precedente seguiamo il ragionamento di Lagrange su un esempio (con procedura a fianco) e aiutiamoci con un software di manipolazione simbolica (DERIVE, nella fattispecie) sia per la parte algebrica delle trasformazioni effettuate, sia per quel che riguarda i grafici corrispondenti:

Per vedere le soluzioni negative, cambiamo x con $-x$.	$-x^5+3x^3+11x^2-1=0$
Poiché vogliamo il coefficiente del primo termine positivo, consideriamo $-F(-x)$	consideriamo allora $x^5-3x^3-11x^2+1=0$
Applicando le stesse considerazioni effettuate per le radici positive, abbiamo che, detto h il maggiore in valore assoluto dei termini negativi della nuova equazione, per $x > h+1$ il primo membro della nuova equazione ha segno costante	$h+1 = 11+1 = 12$ $x > 12 \rightarrow -F(-x) > 0$
Possiamo quindi concludere che, poiché $F(x)$ è negativa per $x < -12$ ed è positiva per $x > 4$, abbiamo che le soluzioni di $F(x) = 0$ appartengono all'intervallo $]-12, 4[$.	

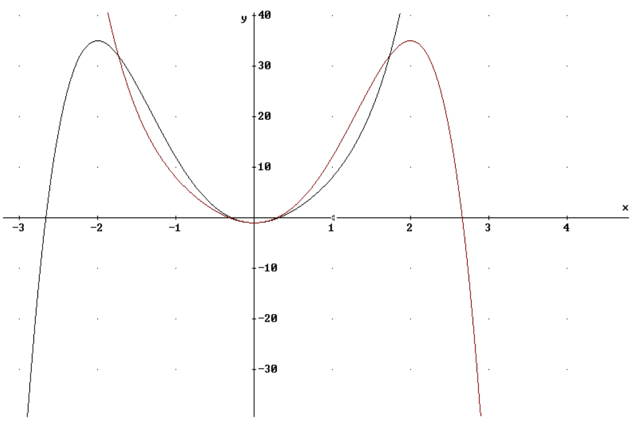


Fig. 1

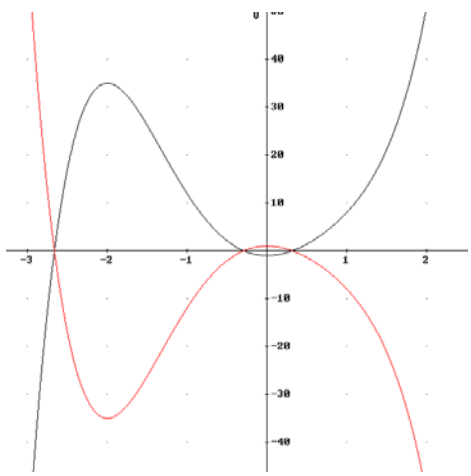


Fig. 2

In figura 1 sono rappresentati $y = F(x)$ e $y = F(-x)$. In figura 2 sono rappresentati $y = F(x)$ e $y = -F(-x)$ con $F(x) = x^5 - 3x^3 + 11x^2 - 1$

Successivamente Lagrange passa a restringere l'intervallo nel quale si trovano le soluzioni: l'idea è quella di operare un cambio di variabile per ricondursi al caso già preso in esame [Lagrange, 1839, 84 – 85]

> [...] Ora cambiando l'incognita x in $\frac{1}{z}$, si sa che le più grandi radici dell'equazione in x diventano le più piccole della trasformata in z, e reciprocamente: si potrà dunque, con questa trasformazione, dopo aver ordinato i termini secondo le potenze di z, in modo che il primo termine sia z^m, trovare egualmente i limiti K+1 e -H-1 delle radici positive e negative dell'equazione in z. Così K+1 essendo maggiore del maggior valore di z o di $\frac{1}{x}$, per la natura delle frazioni, $\frac{1}{K+1}$ sarà reciprocamente minore del minor valore di x e, in pari modo, $\frac{1}{H+1}$ sarà minore del minor valore negativo di x. Quindi si conchiuderà finalmente che tutte le radici reali positive saranno necessariamente comprese fra i limiti $\frac{1}{K+1}$ e k+1 e che le radici reali negative cadranno fra i limiti $-\frac{1}{H+1}$ e $-h-1$

Come prima, schematizziamo la procedura di restrizione dell'intervallo che contiene le soluzioni e produciamo un esempio (prendendo in considerazione $F(x) = x^5 - 3x^3 - 11x^2 + 1$) :

Procedura	Esempio
Cambiare x in $\frac{1}{z}$	$(\frac{1}{z})^5 - 3(\frac{1}{z})^3 + 11(\frac{1}{z})^2 - 1 = 0$
Ordinare i termini secondo le potenze di z	$-z^5 + 11z^3 - 3z^2 + 1 = 0$ $z^5 - 11z^3 + 3z^2 - 1 = 0$
Applicare a questa equazione lo stesso procedimento di prima in modo da trovare K e H tali che le sue radici siano nell'intervallo]-H-1, K+1[	$K = 11$, $H = 11$]-12, 12[
Ma se $-H-1<z<K+1$, allora $\frac{1}{z} < -\frac{1}{H+1}$ e $\frac{1}{z} > \frac{1}{K+1}$ ossia $-h-1 < x < -\frac{1}{H+1}$ e $\frac{1}{K+1} < x < k+1$	Le soluzioni dell'equazione $x^5 - 3x^3 + 11x^2 - 1 = 0$ appartengono all'insieme: $]-12, -\frac{1}{12}[\cup]\frac{1}{12}, 4[$

Lagrange nota che, in casi particolari, esistono altri metodi per trovare limiti migliori, ma che per essi si richiedono alcuni tentativi, per cui il precedente è preferibile nella maggior parte dei casi. Poi continua [Lagrange, 1839, p. 86]:

> Ma non basta, il più delle volte, avere i limiti delle radici di un'equazione, bisogna conoscere gli stessi valori delle radici, almeno con quella approssimazione maggiore che le circostanze del problema possono richiedere giacché ogni approssimazione conduce in ultima analisi ad un'equazione che ne racchiude la soluzione; e se non si può risolvere l'equazione, ogni altro calcolo fu inutilmente stabilito. Si può dunque considerare questa ricerca come la più importante di tutta l'analisi [...] Si possono trovare quanti si vogliano punti di una curva, ed avvicinati quanto più piace tra loro, sostituendo successivamente a x diversi numeri vicinissimi l'uno all'altro e prendendo per y i risultamenti di queste sostituzioni nel primo membro dell'equazione. Se nella serie di questi risultamenti, se ne trovano due di segni contrarj, sarà indubitato, esservi almeno una radice reale tra i due valori di x che li hanno dati; allora si potrà con nuove sostituzioni, ristringere questi due limiti e accostarsi quanto più si vorrà alla radice cercata. Di fatto, chiamato A il più minore e B il maggiore dei due valori di x che hanno dato dei risultati di segno contrario; se si domanda il valore della radice esatta col solo errore n, n essendo una frazione piccola quanto si vuole, si sostituiranno successivamente invece di x i numeri in progressione aritmetica
>
> $A+n$, $A+2n$, $A +3n$, ecc.
>
> ovvero
>
> $B-n$, $B-2n$, $B-3n$, ecc.
>
> Sino a che si giunga ad un risultato di segno contrario a quello della sostituzione di A o B; allora i due valori successivi di x che avranno dato risultamenti di segni contrarj, saranno necessariamente l'uno maggiore e l'altro minore della radice cercata, e siccome questi valori non differiscono per l'ipotesi che d'un numero n, ne segue che ciascuno di essi si accosterà alla radice più della quantità n, per modo che l'errore sarà minore di n . Ma come determinare i primi valori da sostituirsi per x in modo che da una parte non facciansi troppi inutili tentativi e dall'altra possiamo essere certi di scoprire per tal modo tutte le radici dell'equazione? Considerando la curva dell'equazione è facile l'accorgersi che tutto si riduce a prendere valori tali che ve ne sia uno almeno che cada fra due intersecazioni vicine, il che avverrà necessariamente, se la differenza tra due valori consecutivi sia minore della più piccola distanza tra due intersecazioni vicine. Così supposto sia D una quantità più

piccola della minima distanza fra due intersecazioni che si succedono immediatamente, si formerà la progressione aritmetica 0, D,2D,3D,4D, ecc. e non si prenderanno di questa progressione che i termini cadenti fra i limiti $\frac{1}{K+1}$ e $k+1$ determinati con il metodo già detto: così si avranno i valori che, sostituiti per x, faranno conoscere tutte le radici positive della equazione e daranno in pari tempo i primi limiti di ogni radice. Si formerà pure per le radici negative la progressione 0, –D, –2D, –3D, –4D ecc. di cui non si prenderanno che i termini contenuti fra i limiti $-\frac{1}{H+1}$ e $-h-1$

Ed ecco sciolta la difficoltà: ma trattasi di trovare la quantità D colla condizione che sia più piccola del minimo intervallo tra le due intersecazioni vicine della curva con l'asse.

Il procedimento che Lagrange attua per determinare D è di una complessità tale da risultare, a mio avviso, improponibile in una classe di scuole secondaria superiore. È per tale motivo che è consigliabile fermarsi a sottolineare l'importanza di determinare D per determinare tutte le soluzioni reali e dire che Lagrange ha risolto il problema. È invece opportuno notare che un'equazione di grado n ha, al più, n radici reali e che un intervallo che ne contiene almeno una può essere determinato individuando due valori a e b tali che $F(a)F(b) < 0$. Inoltre, nei problemi pratici, l'approssimazione con la quale si ricerca una radice è fissata. Se tale approssimazione risulta maggiore di D, allora vuol dire che, ai fini pratici, due eventuali radici, che appartengono a un intervallo di ampiezza inferiore all'approssimazione, possono essere considerate coincidenti. Vediamo come si possa utilizzare il software DERIVE per determinare le soluzioni positive dell'equazione x^5-$3x^3$-$11x^2$+1=0 a meno di 0.1. Ricordiamo che tutte le soluzioni positive (come più sopra dimostrato), appartengono all'intervallo $]\frac{1}{12}, 4[$.

Con la prima delle seguenti istruzioni definiamo ricorsivamente una funzione "PASSO" tale che:

$$\begin{cases} PASSO(0) = \dfrac{1}{12} \\ PASSO(n) = 0.1 + PASSO(n-1) \end{cases}$$

In altri termini, la funzione così definita calcola i valori da attribuire che vengono fatti assumere alla variabile x nell'intervallo $]\frac{1}{12}, 4[$ a partire da $\frac{1}{12}$ fino ad arrivare a 4, con passo di 0.1, pari alla precisione con la quale si ricerca la radice.

La seconda istruzione definisce una matrice le cui righe sono le coordinate del punti della funzione polinomiale $y = F(x)$, ovvero le coppie ($PASSO(n)$, F(PASSO(n)). Le radici cercate si troveranno tra due valori successivi $PASSO(n_1)$ e $PASSO(n_2)$ tali che la funzione F assume, nei due valori, segno discorde. La radice è nota con un'imprecisione minore di $|PASSO(n_1) - PASSO(n_2)| = 0.1$, che è proprio l'approssimazione voluta.
Qui di seguito sono riportate le prime 5 coordinate calcolate della funzione polinomiale. La radice appartiene all'intervallo]0.283, 0.383[.

$$\#1: \quad \text{PASSO}(n) := \text{IF}\left(n = 0, \frac{1}{12}, \text{PASSO}(n-1) + 0.1\right)$$

$$\#4: \quad v := \text{VECTOR}\left(\left[\text{PASSO}(n), \text{PASSO}(n)^5 - 3\cdot\text{PASSO}(n)^3 + 11\cdot\text{PASSO}(n)^2 - 1\right], n, 0, 40\right)$$

$$\begin{bmatrix} 0.0833 & -0.925 \\ 0.183 & -0.648 \\ 0.283 & -0.183 \\ 0.383 & 0.455 \\ 0.483 & 1.25 \end{bmatrix}$$

Come si vede, con tale procedura risolutiva abbiamo riprodotto fedelmente il metodo di Lagrange che abbiamo assunto come oggetto di studio
Può suscitare qualche perplessità il seguente fatto: DERIVE ha un modulo che risolve le equazioni per via approssimata. Perché, allora, non utilizzare funzioni già implementate nel software per risolvere le equazioni? A mio avviso c'è almeno una ragione che rende significativo il percorso scelto: un procedimento del tipo ora visto consente un maggiore controllo delle operazioni che si stanno eseguendo e quindi una maggiore comprensione del problema posto e delle strategie risolutive adottate.

QUALCHE ALTRA CONSIDERAZIONE SUL TEOREMA DEGLI ZERI

Già nel 1821 nel "Cours d'analyse" Cauchy dava al teorema degli zeri una prospettiva diversa da quella di Lagrange e scriveva [Menghini, 1991]:

> Sia $f(x)$ una funzione reale della variabile x, che rimane continua rispetto a tale variabile fra i limiti $x = a$ e x =X. Se le due quantità $f(a)$ e f(X) sono di segni contrari, si potrà soddisfare l'equazione $f(x) = 0$ per uno o più valori reali di x compresi fra a e X

L'inizio della dimostrazione è analogo al procedimento di Lagrange. La frazione n è sostituita dal rapporto h/m, dove m è un numero intero maggiore di 1 e h=X-a se a < X

Dato che delle due quantità $f(a)$ e $f(X)$ una è positiva e l'altra è negativa, se si forma la successione $f(a), f(a+\frac{h}{m}), f(a+2\frac{h}{m}),..., f(X-\frac{h}{m}), f(X)$

e se, in questa successione, si confrontano successivamente il primo termine con il secondo, il secondo con il terzo, il terzo con il quarto etc., si finirà necessariamente per trovare una o più volte due termini consecutivi che saranno di segno contrario. Siano $f(a'), f(X')$ due termini di questo tipo dove a' è il più piccolo dei due valori corrispondenti di x. Si avrà evidentemente $a<a'<X'<X$ e $X'-a'=\frac{h}{m}=$

$\frac{X-a}{m}$

Come viene precisato in [Menghini, 1991], a questo punto Cauchy itera il procedimento, che , invece, per Lagrange sarebbe terminato, in quanto si sarebbe determinata la soluzione a meno dell'errore prefissato. Cauchy, invece, costruisce due successioni, una crescente e l'altra decrescente, di cui cerca il limite comune. Afferma infatti che, in modo analogo a quanto appena visto, si possono trovare due valori a'' e X'' tali che

$a'<a''<X''<X'$

con $X''-a''=\frac{X'-a'}{m}=\frac{X-a}{m^2}$

e continuando cosi si otterrà una serie di valori crescenti di x (a,a',a'',....)

e una serie di valori decrescenti X,X',X'',....

che superando i primi delle quantità rispettivamente uguali a

$X-a$, $\frac{X-a}{m}$, $\frac{X-a}{m^2}$,....

finiranno per differire dai primi valori tanto poco quanto si voglia. Se ne deve concludere che i termini generali delle due serie convergeranno verso un limite comune. Sia l tale limite. Dato che la funzione $f(x)$ è continua tra a e X, i termini generali delle due serie

$f(a), f(a'), f(a'')$,....

e

$f(X), f(X'), f(X'')$, ...

convergeranno verso il limite comune $f(l)$ e, dato che avvicinandosi a tale limite esse resteranno sempre di segno contrario, è chiaro che la quantità $f(l)$, necessariamente finita, non potrà differire da 0. Di conseguenza si verificherà l'equazione $f(x)=0$ attribuendo alla variabile x il valore particolare compreso tra a e X. In altre parole $x = l$ sarà una radice dell'equazione data.

Lo stesso problema è affrontato da Bolzano in un lavoro del 1817 che, però, passò inosservato anche ai matematici parigini, ai quali l'opera di Bolzano era rivolta [Bottazzini, 1990, p. 86].
Con Bolzano la formulazione (e la dimostrazione) del teorema degli zeri cambia fortemente prospettiva: La dimostrazione, pur fornendo un algoritmo che consente di costruire un'approssimazione buona quanto si vuole dello zero, fa uso di tecniche non costruttive. Si tratta di una dimostrazione di esistenza che non consente, in generale, di rendere effettivo il processo di determinazione dello zero; il linguaggio e lo stile sono ben lontani da quelli usati da Lagrange circa quaranta anni prima, ma anche da quelli usati da Cauchy qualche anno dopo; potrebbe essere opportuno commentare questo fatto con gli studenti, riflettendo sulla non linearità che in genere caratterizza la storia di una disciplina. La dimostrazione di Bolzano non è concettualmente lontana da quella di Cauchy, a parte il fatto che si basa esplicitamente sul teorema della permanenza del segno.
Qui di seguito riporto la dimostrazione, in linguaggio moderno, tratta da [Courant Robbins, 1971, p. 463-464], del teorema di Bolzano.

> Consideriamo l'intervallo $I = [a,b]$ in cui la funzione f è definita e dimezziamolo prendendo il punto medio $x_1 = \frac{a+b}{2}$. Se $f(x_1)=0$, allora non rimane altro da dimostrare. Se $f(x_1) \neq 0$, allora $f(x_1) > 0$ o $f(x_1) < 0$. In ognuno dei due casi, una delle metà di I gode delle proprietà che il segno di f è diverso agli estremi. Chiamiamo I_1 questo intervallo. Ripetiamo il procedimento dimezzando I_1. Sia x_2 il punto medio di I_1. Abbiamo $f(x_2) = 0$, oppure $f(x_2) >0$, oppure $f(x_2) < 0$. Si può nuovamente scegliere I_2 metà di I_1 tale che in I_2 f abbia segno discorde agli estremi. Iterando il passaggio o troviamo un punto per cui $f(x) = 0$, oppure abbiamo una successione monotona di intervalli I_1, I_2, ...,I_n,.... In quest'ultimo caso il postulato di Dedekind - Cantor assicura l'esistenza in I di un punto a comune a tutti gli intervalli. Affermiamo che $f(a)=0$, il che equivale a dire che a è il punto la cui esistenza dimostra il teorema.
>
> Finora non abbiamo usata l'ipotesi di continuità. Essa ci serve a concludere il ragionamento con un ricorso all'assurdo. Dimostreremo che $f(a) = 0$ ammettendo il contrario e deducendone una contraddizione. Supponiamo che sia $f(a) \neq 0$. Allora esiste ε tale che $f(a) = 2\varepsilon > 0$. Poiché f è continua, si può trovare J di ampiezza 2δ, avente a come punto medio, tale che $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$ per ogni x di J. Poiché $f(a) = 2\varepsilon$, abbiamo che $f(x) > \varepsilon$ per ogni x di J. Ma la successione degli intervalli tende a un intervallo di ampiezza 0, quindi esiste n tale che $I(n)$ contenuto in J. Questo porta a contraddizione, infatti per come si è scelto $I(n)$, f deve avere segni opposti agli

estremi di $I(n)$, cosicché f deve avere in qualche punto di J valore negativo. Allora $f(a) > 0$ assurdo. Analogamente si dimostra assurdo il supporre $f(a) < 0$, per cui è possibile concludere $f(a) = 0$

Come si precisa in [Menghini, 1991], Lagrange, applica un procedimento finito a funzioni polinomiali e considera scontate continuità ed esistenza (e quindi la convergenza del procedimento). Cauchy tratta invece di funzioni qualunque e non esplicita una condizione equivalente al teorema della permanenza del segno. Inoltre considera i numeri reali come soggiacenti e intuitivi o, meglio, considera l'ambiente dei numeri reali come scontato. Il discorso di Cauchy è però spostato verso l'esistenza della soluzione, contrariamente a quanto avviene per Lagrange. In altri termini, Lagrange fornisce un metodo per trovare le soluzioni; Cauchy, e più ancora Bolzano spostano l'attenzione al problema dell'esistenza della soluzione. Si noti, però, che il linguaggio è notevolmente cambiato. Non si parla più di risoluzioni di equazioni, ma di proprietà di funzioni continue.

Ci si può chiedere che cosa comporta, dal punto di vista dell'attività matematica, questo cambio di linguaggio, questo cambio di prospettiva. La tesi che mi sembra di poter sostenere (importante anche per quel che riguarda le conseguenze didattiche) è che questa diversa prospettiva dalla quale si considera il teorema degli zeri, consenta di porsi e di risolvere problemi nuovi, che, con la formulazione di Lagrange, non sarebbero stati ritenuti affrontabili e risolvibili con l'utilizzazione del teorema degli zeri.

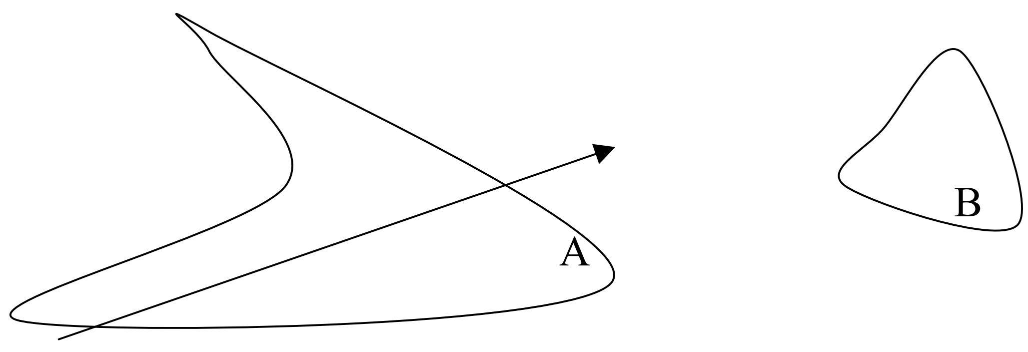
Riporto il seguente esempio, tratto da [Courant, Robbins, 1971, pp.469 – 472] che costituisce, a mio avviso, una buona argomentazione a sostegno della tesi appena espressa.

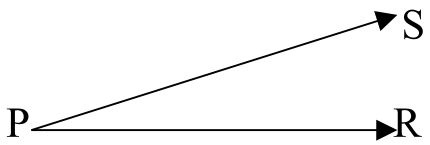
Teorema.

Se A e B sono due superfici (ossia porzioni di piano limitate da una curva semplice chiusa) nel piano, esiste una retta del piano che dimezza A e B contemporaneamente.

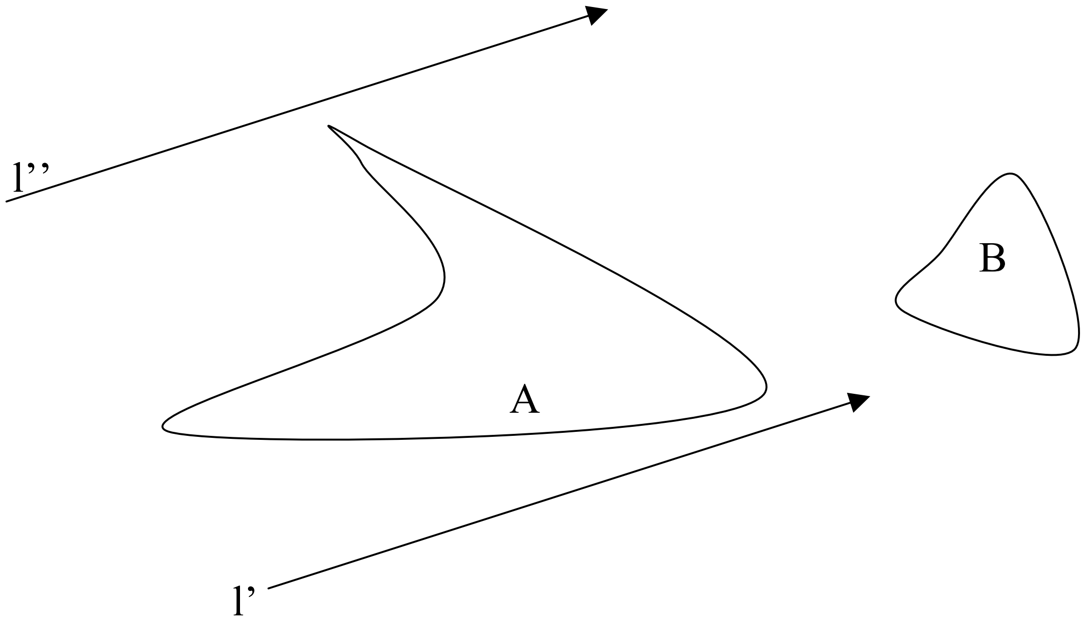
Dimostrazione.

Scegliamo un punto fisso P e tracciamo da P una semiretta orientata PR. Se prendiamo una qualsiasi semiretta orientata PS che formi un angolo x con PR, esiste una retta orientata del piano che dimezza la superficie A e ha la stessa direzione di PS.

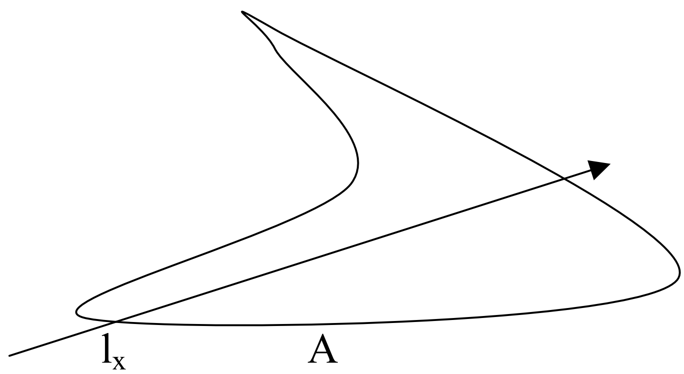




Dimostriamo tale fatto. Prendiamo una retta *l’* orientata come PS e giacente interamente da una stessa parte rispetto ad A. Consideriamo ora una retta *l*'', in modo tale che A sia contenuta nella striscia delimitata da *l*' e *l*''.



Consideriamo ora la funzione *f* il cui valore risulta definito dalla differenza tra l’area di A che si trova “alla destra” di una retta parallela a *l’* (o *l’’*) e l’area di A che si trova “alla sinistra” della stessa retta. Tale funzione, per come è stata definita, è tale che $f(l')f(l'')<0$; inoltre, è continua. Allora, per il teorema di Bolzano, essa deve annullarsi per una certa posizione intermedia l_x, la quale, perciò, dimezza A.



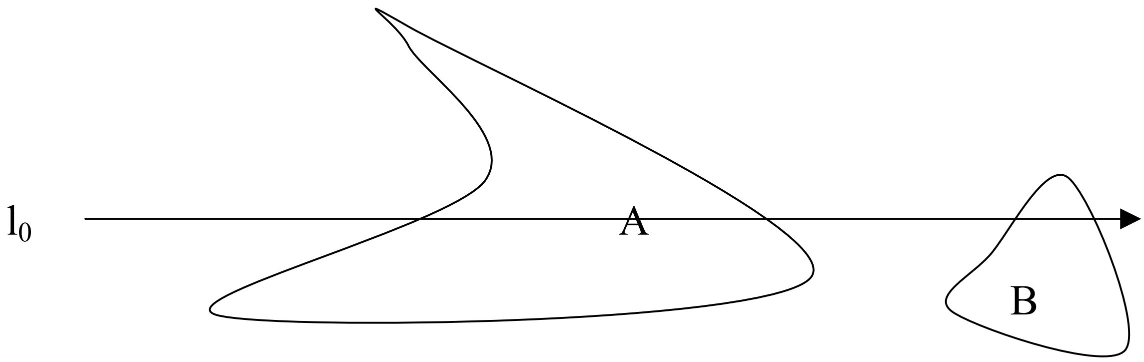
Il discorso ora fatto per le rette parallele a PS, può essere ripetuto per rette che formano con PR angoli diversi. Abbiamo che, per ogni valore di *x* (da 0 a 360 gradi), la retta orientata che dimezza A viene univocamente determinata.

Prendiamo ora in considerazione la famiglia di rette l_x che, al variare di x, dimezzano A.

Consideriamo ora la funzione $y = g(x)$ definita come la differenza tra l'area di B "alla destra di l_x" e l'area di B "alla sinistra di l_x" (dove, per ciascun x, l_x rappresenta una retta che dimezza A e che forma un angolo x con PR)

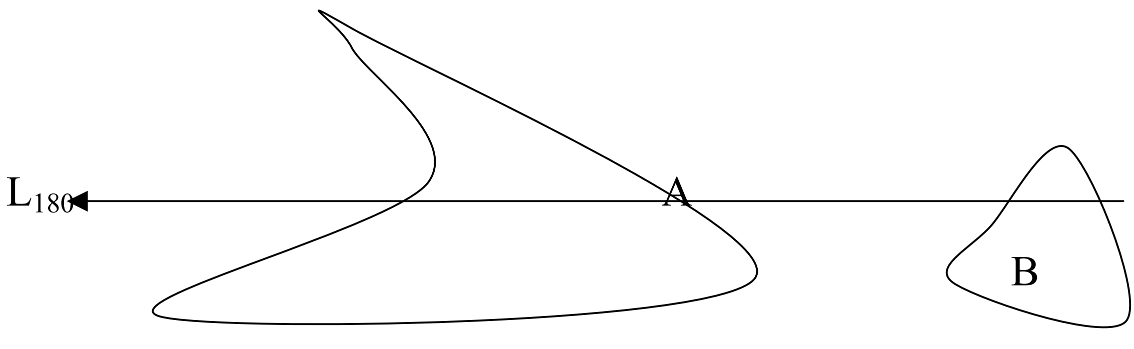
Prendiamo ora in considerazione la retta l_0 che dimezza A e che è orienta come PR. Può accadere che tale retta dimezzi B (e in tal caso il teorema sarebbe dimostrato), oppure che lasci alla sua destra una porzione di B maggiore di quella che lascia alla sinistra , o viceversa.

Supponiamo che lasci alla sua destra una porzione maggiore di B rispetto a quella che lascia alla sua sinistra.



Allora $g(l_0) > 0$. Facciamo crescere x fino a 180 gradi. La retta l_{180} ha la stessa direzione di l_0, ma verso cambiato, quindi la sua destra e la sua sinistra sono, rispettivamente, la sinistra e la destra di l_0.

Allora $g(l_{180}) < 0$. Poiché g è continua e poiché $g(l_0)\ g(l_{180}) < 0$, allora possiamo concludere che esiste un valore a di x tale che $g(l_a) = 0$. Ossia la retta l_a dimezza sia A sia B.



Il teorema è cosí dimostrato, ma, si badi bene, viene dimostrata l'esistenza della retta che dimezza sia A, sia B, ma non viene dato alcun procedimento per costruirla.

CONCLUSIONI

Se ritorniamo alle parole di Lagrange

" e se non si può risolvere l'equazione, ogni altro calcolo fu inutilmente stabilito",

si può ben comprendere il cambio di prospettiva tra l'impostazione di Lagrange e quella di Bolzano, tra l'analisi dei primi analisti e quella che proponiamo ai nostri ragazzi. C'è una fortissima discontinuità espistemologica tra il modo di pensare, di porsi e risolvere i problemi dei primi analisti e quello degli analisti del rigore. Questa discontinuità, che è stata diluita nel processo storico, come viene risolta nel campo cognitivo? Ovviamente non possiamo aspettare 30 o 40 anni per proporre il teorema degli zeri alla maniera di Bolzano, ma siamo sicuri che il modo di pensare degli studenti e di affrontare i problemi [ricordiamoci che essi vengono anche da un addestramento all'algebra e alla risoluzione esatta o approssimata di equazioni, ossia da un allenamento all'utilizzazione di algoritmi alla Lagrange] sia adatto a capire l'impostazione di Bolzano?

Dal punto di vista didattico, vorrei ribadirlo, il problema è quello di fornire agli studenti ambienti di apprendimento che consentano di recuperare una continuità cognitiva anche a dispetto delle discontinuità epistemologiche. In altri termini dobbiamo consentire agli studenti la possibilità di ricapitolare e di effettuare esperienze (necessariamente locali, parziali e opportunamente guidate) di costruzione di parti di teorie.

Tengo particolarmente a ribadire che lo scopo di questo lavoro è essenzialmente quello di fornire un esempio di come nell'attività didattica si possano utilizzare varie indicazioni e vari ambiti (la matematica, la storia, la ricerca didattica, le nuove tecnologie, …), prestando particolare attenzione a integrarli in percorsi e attività che possano risultare motivanti e chiarificatori per gli studenti.

Un'ipotesi che nasce da questa e da altre attività di carattere analogo, come ad esempio quella descritta in [Paola, 1998], è che si allarghi, in un certo senso, il concetto di *contesto motivante e significativo* per attività didattiche: non solo e non sempre quello della partenza della realtà e delle applicazioni della matematica, ma anche contesti interni alla matematica stessa. Anche questi possono e devono svolgere il compito di aiutare gli studenti a condividere con l'insegnante la razionalità dell'edificio matematico, contribuendo a fornire un'immagine non distorta dell'attività matematica.

BIBLIOGRAFIA

Arcavi, A., Barbin, E., Bekken, O., Dynnikov, C. M., Furinghetti, F., El Idrissi, A., Jahnke, H. N. & Week, C.: in stampa, 'The use of original sources in the mathematics classroom', in J. Fauvel, & J. Van Maanen (editors), *ICMI Study on 'The role of the history of mathematics in the teaching and learning of mathematics'* (Luminy, Marseille, 1998).

Bottazzini, U.: 1990, *Il flauto di Hilbert*, UTET, Torino.

Courant, R., Robbins, H: 1971, *Che cos'è la matematica?*, trad. it di *What is Mathematics?*, 1941, Oxford University Press, Oxford.

Lagrange, J.L.: 1839, *Lezioni elementari sulle matematiche*, Giusti, Milano.

Menghini, M.: 1991, Problematiche didattiche attuali e sviluppo dell'analisi matematica, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, v. 10 B, 909 – 930.

Paola, D.: 1998, Il problema delle parti: prassi didattica e storia della matematica, *Didattica delle scienze* n. 198, 31 – 36.